


V un K -ev $W \subset V$ un sev.

On veut identifier W comme un ensemble de vecteurs de V avec certaines propriétés.

Il y a au moins 2 manières naturelles d'identifier les elts de W .

1) Representation cartésienne de W :

la donnée de $l_1, \dots, l_m$ formes linéaires
sur V $l_i: V \rightarrow K$ $i=1 \dots m$ telles

que

$$W = \{ v \in V \mid l_1(v) = l_2(v) = \dots = l_m(v) = 0 \}$$

Souvent on dispose d'une base $B \subset V$
et donc de coordonnées (ds cette basis)
et les formes l_i s'écriront comme
 CL ds formes lin coordonnées
relative à B .

$$V = K^3 = \{v = (x, y, z), x, y, z \in K\}$$

for example $m=2$

$$l_1(x, y, z) = x + y + z$$

$$l_2(x, y, z) = x + 2y$$

$$W = \{(x, y, z) \in K^3 \mid x + y + z = x + 2y = 0\}$$

Rmq: les représentations ne sont pas
uniques!

$$W = \{ (x, y, z) \mid x + y + z = 0 = y - z = 0 \}$$

$$l_1(v) = l_2(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow l_1(v) = 0, \underbrace{(l_2 - l_1)(v)}_{= z - y} = 0$$

$$W = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} x + y + z = 0 = x + 2y \\ = y - z \end{array} \right\}$$

$$l_1(v) = l_2(v) = 0 \iff l_1(v) = l_2(v) = (l_2 - l_1)(v) = 0$$

Une rep cart est minimale si
 elle utilise un nb minimal de formes
 linéaires: la FL $\{l_1, \dots, l_m\}$ sont une
 famille libre

le ub m est minimal si et seulement si

$$m = \dim V - \dim W.$$



2 Représentations paramétriques

on se donne d vecteurs $v_1, \dots, v_d$

et on représente W en disant

$$W = \left\{ v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_d v_d \mid \lambda_1, \dots, \lambda_d \in K \right\}$$

↑
↑
↑
paramètres de la représentation

de n equiv: $\{v_1, \dots, v_d\}$ est une famille
génératrice de W .

si $\{v_1, \dots, v_d\}$ est de taille minimale

($\Leftrightarrow$ elle est libre $\Leftrightarrow$ c'est une base de W)

la famille $\{v_1, v_2, v_1+v_2, v_3, \dots, v_d\}$
est génératrice mais pas minimale.

si d est minimal
 $d = \dim W$.

Determinant

$$\begin{array}{ccc} \varphi: V \rightarrow V & \varphi \in \text{End}(V) \\ \downarrow & \downarrow \\ \hookrightarrow \det(\varphi) \in K \end{array}$$

si $M \in M_d(K)$ on peut voir M
comme un elt de $\text{End}(K^d)$
en munissant K^d de la base canonique
 $B_d^o \subset K^d$ et en prenant l'endomorphisme
$$\varphi_M: (x_1, \dots, x_d) \in K \rightarrow (y_1, \dots, y_d) \in K^d$$

avec
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

et
$$\text{mat}(\varphi_M)_{B_d^o, B_d^o} = M$$

$$\leadsto \det M = \det(\varphi_M).$$

Si on dispose de $V = K\text{-ev}$ de $\dim d$

$B \subset V$ une base de V

"
 $\{v_1, \dots, v_d\}$

$\varphi \in \text{End}(V)$, $M_\varphi = \text{mat}(\varphi)_B$

$\det M_\varphi = \det \varphi$.

Réciproquement si $M \in M_d(K)$

on lui associe

$$\varphi_M \mapsto \text{mat}(\varphi_M)_B = M.$$

$$\varphi_M(v_1) = m_{11}v_1 + m_{12}v_2 + \dots + m_{1d}v_d$$

$\vdots$

$$\varphi_M(v_d) = m_{d1}v_1 + \dots + m_{dd}v_d$$

Par la définition abstraite

$\det M$ ne dépend pas du choix
de B qui permet de représenter

φ .

La conséquence de cette invariance
c'est que $\forall P \in GL_d(K)$

$$\det(PMP^{-1}) = \det M$$

car PMP^{-1} et M représente un n endo dans des base différente par la théorie du $\det$ de base.

→ on en déduit que $\forall P, M \quad \det(PM) = \det(MP)$

→ on peut aussi le démontrer par les formules combinatoire du $\det$

Base de $\text{Hom}(V, W)$ $B_V = \text{base de } V$
 $= \{e_1, \dots, e_d\}$

$B_W = \text{base de } W = \{f_1, \dots, f_{d'}\}$

Prmq de base: si $\ell: V \rightarrow K$ et
 $w \in W$ est un vecteur qqe
alors $v \in V \rightarrow \ell(v) \cdot w \in \text{Hom}(V, W)$

Donc si $\{e_1^*, \dots, e_d^*\}$ est la base duale
 B_V^* de $B_V =$ la base de
 formes linéaires coordonnées de B_V

alors on dispose de d'xcl appl Lin

$$\varepsilon_{ij}: v \mapsto e_j^*(v) \cdot f_i$$

et les d'x el E_{ij} forment une base de
 $\text{Hom}(V, W)$.

les matrices associées

$\text{mat}(E_{ij})_{B_W B_V} = E_{ij}$ sont les
matrices élémentaires

Action d'un gpe sur un ensemble.

$G \curvearrowright X$ l'action est presentable de
2 manieres

- Par loi externe

•
$$\begin{array}{l} G \times X \longrightarrow X \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x \end{array}$$
 le transformé
de x sous
l'action de g

la loi vérifiant des propriétés de
compatibilité en le produit de
le gp et la composition de 2 trans-
formation

(en particulier $e_6 \cdot x = x$ pour tout x)

au niveau équivalente: on se donne

$$\varphi: G \longrightarrow (\text{Bij}(X, X), \circ)$$

$\parallel$
 $\text{Bij}(X) = G_X$

un morphisme de gpe.

on passe d'une présentation
à l'autre:

• Morphisme $\rightarrow$ loi externe

$$\varphi \quad \rightarrow \quad \bullet \quad \varphi : (g, x) \mapsto \varphi(g)(x)$$

$\uparrow$
 $\varphi(g) \in \text{Bij}(X)$

Loi xtrn $\rightarrow$ morphisme

$$\bullet \quad \rightarrow g \in G \rightarrow \varphi(g): \underset{x}{\underset{\cap}{x}} \rightarrow \underset{x}{\underset{\cap}{g \cdot x}}$$

$$\varphi(g) \in \text{Bij}(X, X)$$

$\varphi(g)$ est une bijection de réciproque
 $\varphi(g)^{-1}: x \rightarrow g^{-1} \cdot x = \varphi(g^{-1})(x)$

par exemple a la place de $\varphi(g)(\bullet)$

ou écrire $g \cdot \bullet$

$$PC_M(x) = \det(xI_3 - M)$$

$$= \det \begin{pmatrix} x - m_{11} & m_{12} & \\ & x - m_{22} & \\ & & x - m_{33} \end{pmatrix}$$

$$= (x - m_{11})(x - m_{22})(x - m_{33}) + \dots$$

$$= x^3 - (m_{11} + m_{22} + m_{33})x^2 + \dots + (-1)^3 \det M$$